

PROOFS FOR THE EXISTENCE OF THE NATURAL NUMBERS..... 4

 Prove $\exists 1 \forall 1$ 4

 Prove $[x \text{ is } y] \Rightarrow [y \text{ is bounded}] \forall x, y$ 4

$\exists 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$ 4

 Prove $1 \in \mathbb{N}$ 4

 Prove $\exists 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$ 4

 Prove 1 is not $\emptyset \forall 1 \in \mathbb{N}$ 4

$\exists n \forall n \in \mathbb{N}$ 5

 Prove that n is not $\infty \forall n \in \mathbb{N}$ 5

 Prove $\exists n \forall n \in \mathbb{N}$ 5

 Prove n is not $\emptyset \forall n \in \mathbb{N}$ 5

$\exists 2 \forall 2 \in \mathbb{N}$, An Example. 5

Card(\mathbb{N})= $\aleph \in \mathbb{N}$ 6

 Definition of Sub-Container 6

 Prove $S_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ is a container with $\exists \text{card}(S_n) = n \forall S_n, n \in \mathbb{N}$ 6

 Prove $S_n \subseteq \mathbb{N} \forall S_n, \mathbb{N}$ 6

 Prove $S_n \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \text{card}(S_n) \in \mathbb{N} \forall S_n, n \in \mathbb{N}$ 6

 Prove $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \forall \mathbb{N}$ 6

 Prove $|\mathbb{N}|$ is not $\infty \forall |\mathbb{N}|$ where $|\mathbb{N}|$ is a cardinality of \mathbb{N} 6

 Prove $\exists |\mathbb{N}| \forall |\mathbb{N}|$ 7

 Prove $\exists |\mathbb{N}| \forall |\mathbb{N}| \in \mathbb{N}$, where $|\mathbb{N}|$ is cardinality of \mathbb{N} 7

 Prove $\aleph \in \mathbb{R}$ 7

 Verify that \aleph is not infinity $\forall \aleph$ 7

The Nontrivial Existence of \aleph 8

 Prove $\text{card}(\emptyset) = 0$ 8

 Prove that if $\text{card}(C) = 0$ then C is $\emptyset \forall C$ 8

 Prove $1 \in 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$ 8

 Prove 1 is a container $\forall 1 \in \mathbb{N}$ 8

 Prove $\text{card}(1) \neq 0 \forall 1 \in \mathbb{N}$ 8

 Prove 1 is not $\emptyset \forall 1 \in \mathbb{N}$ 8

 Prove $\text{card}(n) \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ 8

 Prove n is not $\emptyset \forall n \in \mathbb{N}$ 8

Prove \aleph is not $\emptyset \forall \aleph \in \mathbb{N}$	8
Prove $\text{card}(\mathbb{N}) > 0$	8
Prove that \mathbb{N} is a container with $\exists \text{card}(\mathbb{N}) = \aleph \forall \aleph, \aleph$	8
Prove that n is a container with $\exists \text{card}(n) = 1 \forall n \in \mathbb{N}$	9
自然數存在的證明.....	10
證明 $\exists 1 \forall 1$	10
證明 $[x \text{ 即 } y] \Rightarrow [y \text{ 即有界}] \forall x, y$	10
$\exists 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$	10
證明 $1 \in \mathbb{N}$	10
證明 $\exists 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$	10
證明 1 即非 $\emptyset \forall 1 \in \mathbb{N}$	10
$\exists n \forall n \in \mathbb{N}$	11
證明 n 即非 $\infty \forall n \in \mathbb{N}$	11
證明 $\exists n \forall n \in \mathbb{N}$	11
證明 n 即非 $\emptyset \forall n \in \mathbb{N}$	11
舉例 $\exists 2 \forall 2 \in \mathbb{N}$	11
$\text{Card}(\mathbb{N}) = \aleph \in \mathbb{N}$	12
子容器的定義.....	12
證明 $S_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 即一個容器帶著 $\exists \text{card}(S_n) = n \forall S_n, n \in \mathbb{N}$	12
證明 $S_n \subseteq \mathbb{N} \forall S_n, \mathbb{N}$	12
證明 $S_n \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \text{card}(S_n) \in \mathbb{N} \forall S_n, n \in \mathbb{N}$	12
證明 $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \forall \mathbb{N}$	12
證明 $\exists \mathbb{N} \forall \mathbb{N} , \mathbb{N} $ 為 \mathbb{N} 的基數.....	13
證明 $\exists \mathbb{N} \forall \mathbb{N} \in \mathbb{N}$, 而 $ \mathbb{N} $ 即 \mathbb{N} 的基數.....	13
證明 $\aleph \in \mathbb{R}$	13
查對 \aleph 即非無限 $\forall \aleph$	13
非微不足道 \aleph 的存在.....	14
證明 $\text{card}(\emptyset) = 0$	14
證明若 $\text{card}(C) = 0$ 則 C 即 $\emptyset \forall C$	14
證明 $1 \in 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$	14
證明 1 即一個容器 $\forall 1 \in \mathbb{N}$	14
證明 $\text{card}(1) \neq 0 \forall 1 \in \mathbb{N}$	14

證明 1 即非 $\emptyset \forall 1 \in \mathbb{N}$ 。	14
證明 $\text{card}(n) \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ 。	14
證明 n 即非 $\emptyset \forall n \in \mathbb{N}$ 。	14
證明 \aleph 即非 $\emptyset \forall \aleph \in \mathbb{N}$ 。	14
證明 $\text{card}(\mathbb{N}) > 0$ 。	14
證明 \mathbb{N} 即一個容器帶著 $\exists \text{card}(\mathbb{N}) = \aleph \forall \mathbb{N}, \aleph$ 。	14
證明 n 即一個容器帶著 $\exists \text{card}(n) = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ 。	15

PROOFS FOR THE EXISTENCE OF THE NATURAL NUMBERS

∞ can exist without an explicitly specified container: $\exists \infty \forall \infty$; 1 can also exist without an explicitly specified container: $\exists 1 \forall 1$.

Prove $\exists 1 \forall 1$.

Proof: Suppose 1 is ∞ $\therefore \infty$ is a container. But, ∞ is not a container; (∞ is not a container) and (∞ is a container) $\rightarrow \leftarrow$
 $\forall 1 \therefore 1$ is not ∞ $\therefore \exists 1 \forall 1$. Q.E.D.

By induction, this section proves the existence of the natural numbers $\exists n \forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ learnt since kindergarten starting from the $\exists 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$ proof. For example, prove $\exists 2 \forall 2 \in \mathbb{N}$, and, 2 is not $\emptyset \forall 2 \in \mathbb{N}$. Then this paper proves that \mathbb{N} is a container with $\exists \text{card}(\mathbb{N}) = \aleph$ where \aleph is not \emptyset , and verification of (\aleph is not infinity $\forall \aleph$). At the end, the paper shows that each element in \mathbb{N} is a container with cardinality of 1. (Note that although \emptyset in \mathbb{N} , mathematical inductions start with $1 \in \mathbb{N}$ instead \emptyset .) 霍建華 (Huo Jian Hua's) Definition of Boundedness is also essential to lay the groundwork: $[x \text{ is } y] \Rightarrow [y \text{ is bounded}] \forall x, y$.

Prove $[x \text{ is } y] \Rightarrow [y \text{ is bounded}] \forall x, y$.

Proof: Note from the previous proof: $[x \text{ is } y] \Rightarrow [y \text{ is a container}]$. $\therefore [y \text{ is a container}] \Rightarrow [y \text{ belongs to a container}]$ by [Table XY1] $\therefore y$ is bounded $\forall x, y$, by Huo Jian Hua's Definition of Boundedness. Q.E.D.

$\exists 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$

The container of $\exists 1 \forall 1$ is unspecified. However, 1 can be in \mathbb{N} , so 1 can be with \mathbb{N} being a container: $1 \in \mathbb{N}$.

Prove $1 \in \mathbb{N}$.

Prove: 1 in $\mathbb{N} \therefore 1 \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Further, 1 can exist with \mathbb{N} being a container: $\exists 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$.

Prove $\exists 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$.

Proof: Suppose 1 is ∞ $\therefore \infty$ is bounded. But, ∞ is not bounded; (∞ is not a bounded) and (∞ is a bounded), $\rightarrow \leftarrow \forall 1 \in \mathbb{N}$, $\therefore 1$ is not ∞ $\therefore \exists 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Prove 1 is not $\emptyset \forall 1 \in \mathbb{N}$.

Proof: By [Table EQ] (3) from Supporting Proofs for the Empty, $[1=1] \Rightarrow [1 \text{ in } 1]$. The count of 1 in 1 is 1, so $\text{card}(1)=1 \neq 0$ $\therefore 1$ is not $\emptyset \forall 1 \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Therefore, the existence of the natural number 1 is nontrivial. This completes the first step of the induction process in the $\exists n \forall n \in \mathbb{N}$ proof.

$\exists n \forall n \in \mathbb{N}$

Prove that n is not $\infty \forall n \in \mathbb{N}$.

Proof:

$\exists 1 \forall 1 \in \mathbb{N} \therefore 1$ is not ∞ . Assume $n \in \mathbb{N}$ is not ∞ , yet $(n+1)$ in $\mathbb{N} \therefore (n+1) \in \mathbb{N}$. Suppose $(n+1)$ is $\infty \therefore \infty$ is bounded. But, ∞ is not bounded; (∞ is not bounded) and (∞ is bounded), $\rightarrow \leftarrow \forall (n+1) \in \mathbb{N} \therefore (n+1)$ is not $\infty \therefore n$ is not $\infty \forall n \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Prove $\exists n \forall n \in \mathbb{N}$.

Proof: $\exists 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$. Assume $\exists n \forall n \in \mathbb{N} \therefore n$ is not ∞ . $(n+1)$ in \mathbb{N} , so $(n+1) \in \mathbb{N} \therefore (n+1)$ is not $\infty \therefore \exists (n+1) \in \mathbb{N}$.

Restate the Definition of Existence:

$[\exists x \quad] \Leftrightarrow [\quad x \text{ is not } \infty] \forall x$, equivalently, $[\quad x \text{ is not } \infty] \Leftrightarrow [\exists x \quad] \forall x$.
 $\therefore [\exists (n+1) \in \mathbb{N}] \Leftrightarrow [(n+1) \in \mathbb{N} \text{ is not } \infty] \forall (n+1) \in \mathbb{N} \quad \therefore [(n+1) \in \mathbb{N} \text{ is not } \infty] \Leftrightarrow [\exists (n+1) \in \mathbb{N}] \forall (n+1) \in \mathbb{N}$.
 $\therefore \exists n \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \therefore \exists n \forall n \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Prove n is not $\emptyset \forall n \in \mathbb{N}$.

Proof: 1 is not $\emptyset \forall 1 \in \mathbb{N}$. Assume n is not $\emptyset \forall n \in \mathbb{N}$. $(n+1) \in \mathbb{N}$, the count of $(n+1)$ in $(n+1)$ is 1 .
 $\therefore \text{card}(n+1)=1 \neq 0 \therefore (n+1)$ is not $\emptyset \forall (n+1) \in \mathbb{N} \therefore n$ is not $\emptyset \forall n \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Therefore, every existence of a natural number in \mathbb{N} is nontrivial. For example, prove natural number 2 exists and nontrivial.

$\exists 2 \forall 2 \in \mathbb{N}$, An Example.

Prove $2 \in \mathbb{N}$.

Proof: 2 in $\mathbb{N} \therefore 2 \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

$2 \in \mathbb{N}$ verifies that 2 is a natural number.

Prove $\exists 2 \forall 2 \in \mathbb{N}$.

Proof: $2 \in \mathbb{N} \therefore n=2$. $\exists n \forall n \in \mathbb{N} \therefore \exists 2 \forall 2 \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Prove 2 is not $\emptyset \forall 2 \in \mathbb{N}$.

Proof: $2 \in \mathbb{N}$, so $n=2$. n is not $\emptyset \forall n \in \mathbb{N} \therefore 2$ is not $\emptyset \forall 2 \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Therefore, the existence of the natural number 2 is nontrivial.

Card(N)=ℵ∈N

The cardinality of \mathbb{N} is a nonempty natural number \aleph in \mathbb{N} . To prove $\text{Card}(\mathbb{N})=\aleph \in \mathbb{N}$, we need the Definition of Sub-container, and Huo Jian Hua's Definition of Boundedness.

Definition of Sub-Container

$$[C_a \subseteq C_b] \Leftrightarrow [x \text{ in } C_a \ \forall x \in C_a \ x \text{ in } C_b] \ \forall C_a, C_b.$$

Prove Definition of Sub-Container: $[C_a \subseteq C_b] \Leftrightarrow [x \text{ in } C_a \ \forall x \in C_a \ x \text{ in } C_b] \ \forall C_a, C_b.$

Proof:

C_a	C_b	$C_a \subseteq C_b$	$x \text{ in } C_a \ \forall x \in C_a \ x \text{ in } C_b$	$[C_a \subseteq C_b] \Leftrightarrow [x \text{ in } C_a \ \forall x \in C_a \ x \text{ in } C_b]$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	\emptyset	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T
F	\emptyset	F	F	T
\emptyset	T	T	T	T
\emptyset	F	T	T	T
\emptyset	\emptyset	T	T	T

[Table SubC]

Q.E.D.

Prove $S_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ is a container with $\exists \text{card}(S_n) = n \ \forall S_n, n \in \mathbb{N}$.

Proof: $1 \text{ in } S_1 \therefore S_1$ is a container with $\text{card}(S_1) = 1 \text{ in } \mathbb{N} \therefore \text{card}(S_1) = 1 \in \mathbb{N}$. Suppose $\text{card}(S_1) = 1$ is $\infty \therefore \infty$ is bounded. But, ∞ is not bounded; (∞ is not bounded) and (∞ is bounded) $\rightarrow \leftarrow \forall \text{card}(S_1) = 1 \therefore \text{card}(S_1) = 1$ is not $\infty \therefore \exists \text{card}(S_1) = 1 \ \forall S_1$. Assume S_n is a container with $\exists \text{card}(S_n) = n, n \in \mathbb{N}$. $n+1 \text{ in } S_{n+1} = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1\}$, $\therefore S_{n+1}$ is a container. S_{n+1} has a count of $n+1$ elements in $S_{n+1} \therefore \text{card}(S_{n+1}) = n+1$. The $n+1$ is in $\mathbb{N} \therefore (n+1) \in \mathbb{N}$. Suppose $\text{card}(S_{n+1}) = (n+1)$ is $\infty \therefore \infty$ is bounded. But, ∞ is not bounded; (∞ is not bounded) and (∞ is bounded) $\rightarrow \leftarrow \forall \text{card}(S_{n+1}) = (n+1) \therefore \text{card}(S_{n+1}) = (n+1)$ is not $\infty \therefore \exists \text{card}(S_{n+1}) = (n+1) \therefore S_n$ is a container with $\exists \text{card}(S_n) = n \ \forall S_n, n \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Prove $S_n \subseteq \mathbb{N} \ \forall S_n, \mathbb{N}$.

Proof: $1 \text{ in } S_1 \ \forall 1 \in S_1 \ 1 \text{ in } \mathbb{N} \therefore S_1 \subseteq \mathbb{N}$. Assume $x \text{ in } S_n \ \forall x \in S_n \ x \text{ in } \mathbb{N}$. For $x \text{ in } S_{n+1} \ \forall x \in S_{n+1} \ x$ also in $\mathbb{N} \therefore S_{n+1} \subseteq \mathbb{N} \therefore S_n \subseteq \mathbb{N} \ \forall S_n, \mathbb{N}$. Q.E.D.

Prove $S_n \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \text{card}(S_n) \in \mathbb{N} \ \forall S_n, n \in \mathbb{N}$.

Proof: Let $(S=S_1) \therefore S_1 \subseteq \mathbb{N}, \exists \text{card}(S_1) = 1, 1 \in \mathbb{N}$.

Assume $(S=S_n), S_n \subseteq \mathbb{N}, \exists \text{card}(S_n) = n, n \in \mathbb{N}$.

$(S=S_{n+1})$. But, $n+1$ is in \mathbb{N} , so $(n+1) \in \mathbb{N}$.

$\therefore 1. S_{n+1} \subseteq \mathbb{N} \ \forall S_{n+1}, n+1 \in \mathbb{N}$.

2. S_{n+1} is a container with $\exists \text{card}(S_{n+1}) = n+1 \ \forall S_{n+1}, n+1 \in \mathbb{N}$.

$\therefore S_{n+1} \subseteq \mathbb{N}, \exists \text{card}(S_{n+1}) = n+1, (n+1) \in \mathbb{N} \therefore S_n \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \text{card}(S_n) \in \mathbb{N} \ \forall S_n, n \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Prove $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \ \forall \mathbb{N}$.

Proof: $x \text{ in } \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{N} \ x \text{ in } \mathbb{N} \therefore \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \ \forall \mathbb{N}$. Q.E.D.

Prove $|\mathbb{N}|$ is not $\infty \ \forall |\mathbb{N}|$ where $|\mathbb{N}|$ is a cardinality of \mathbb{N} .

Proof: Suppose $|\mathbb{N}|$ is $\infty \therefore \infty$ is a container. But ∞ is not a container, (∞ is not a container) and (∞ is a container) $\rightarrow \leftarrow \forall |\mathbb{N}| \therefore |\mathbb{N}|$ is not $\infty \ \forall |\mathbb{N}|$. Q.E.D.

Prove $\exists |\mathbb{N}| \forall |\mathbb{N}|$.

Proof: $|\mathbb{N}|$ is not $\infty \therefore \exists |\mathbb{N}| \forall |\mathbb{N}|$ Q.E.D.

Prove $\exists |\mathbb{N}| \forall |\mathbb{N}| \in \mathbb{N}$, where $|\mathbb{N}|$ is cardinality of \mathbb{N} .

Proof: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Let $S_1 = \{1\} \therefore S_1 \subseteq \mathbb{N}, |S_1| = 1, 1 \in \mathbb{N} \therefore \exists |S_1| = 1, \therefore |S_1| \in \mathbb{N}$.
 Assume $S_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}, S_n \subseteq \mathbb{N}, |S_n| = n, n \in \mathbb{N} \therefore \exists |S_n| = n, \therefore |S_n| \in \mathbb{N}$.
 $S_{n+1} = \{1, 2, 3, \dots, n, (n+1)\}, S_{n+1} \subseteq \mathbb{N}, |S_{n+1}| = (n+1), (n+1) \in \mathbb{N} \therefore \exists |S_{n+1}| = (n+1), \therefore |S_{n+1}| \in \mathbb{N}$.
 $\therefore S_n \subseteq \mathbb{N}, \exists |S_n| \forall |S_n| \in \mathbb{N}$
 $\therefore \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}, \exists |\mathbb{N}| \forall |\mathbb{N}|$
 $\therefore \mathbb{N}$ is a special case of S_n where $S_{|\mathbb{N}|} = \mathbb{N}$.
 $\therefore S_{|\mathbb{N}|} \subseteq \mathbb{N}, \exists |S_{|\mathbb{N}|}| \forall |S_{|\mathbb{N}|}| \in \mathbb{N}$. Because $S_{|\mathbb{N}|} = \mathbb{N}$,
 $\therefore \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}, \exists |\mathbb{N}| \forall |\mathbb{N}| \in \mathbb{N}$.
 Let $\aleph = |\mathbb{N}| \therefore \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, \aleph\}$. \aleph in $\mathbb{N} \therefore \aleph \in \mathbb{N}$.
 $S_\aleph = \{1, 2, 3, \dots, \aleph\} \therefore S_\aleph \subseteq \mathbb{N}$ and $\mathbb{N} \subseteq S_\aleph \therefore S_\aleph = \mathbb{N}$.
 $\therefore S_\aleph \subseteq \mathbb{N}, \exists |S_\aleph| \forall |S_\aleph| \in \mathbb{N}$.
 But, $S_\aleph = \mathbb{N}, \therefore \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}, \exists |\mathbb{N}| \forall |\mathbb{N}| \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

From the proof of $\exists |\mathbb{N}| \forall |\mathbb{N}| \in \mathbb{N} \therefore |\mathbb{N}|$ in \mathbb{N} . Although $|\mathbb{N}|$ is cardinal number, because we are able to show that $|\mathbb{N}| \in \mathbb{N}$ through $S_{|\mathbb{N}|} = \mathbb{N}$, for \mathbb{N} by induction, $|\mathbb{N}|$ in $\mathbb{N} \therefore |\mathbb{N}|$ is also a natural number in \mathbb{N} , denoted by $\aleph \therefore \exists \aleph \forall \aleph \in \mathbb{N}$.

Prove $\aleph \in \mathbb{R}$.

Proof: 1 in \mathbb{N} , yet 1 in \mathbb{R} also; assume n in \mathbb{N} and n in \mathbb{R} . But, $(n+1)$ in \mathbb{N} , also $(n+1)$ is in \mathbb{R} . $\aleph \in \mathbb{N} \therefore \aleph \in \mathbb{R}$. Q.E.D.

Verify that \aleph is not infinity $\forall \aleph$.

Proof: $1 \leq \aleph$ and $\aleph \leq 2^\aleph$ where $1, 2, \aleph \in \mathbb{R}$. $\therefore \aleph$ is bounded from below by 1, and \aleph is bounded from above by $2^\aleph \therefore 1 \leq \aleph \leq 2^\aleph \therefore \aleph \in [1, 2^\aleph] \therefore \aleph$ in $[1, 2^\aleph] \therefore \aleph$ belongs to $[1, 2^\aleph] \therefore \aleph$ is bounded, by Hou Jian Hua's Definition of Boundedness. (*)

Verification 1) Suppose \aleph is infinity $\therefore \aleph$ is unbounded $\therefore \aleph$ is not bounded. But, by (*) \aleph is bounded; (\aleph is bounded) and (\aleph is not bounded) $\rightarrow \leftarrow \forall \aleph \therefore \aleph$ is not infinity $\forall \aleph$.

Verification 2) Suppose \aleph is infinity $\therefore \aleph$ is not a number. But, $\aleph \in \mathbb{R} \therefore \aleph$ is a real number $\therefore \aleph$ is a number; (\aleph is a number) and (\aleph is not a number) $\rightarrow \leftarrow \forall \aleph \therefore \aleph$ is not infinity $\forall \aleph$. Q.E.D.

The Nontrivial Existence of \aleph

To show that the existence of \aleph is not trivial, we need to prove that \aleph is not \emptyset . To prove \aleph is not \emptyset , we need to show $\text{card}(\aleph) \neq 0$.

Prove $\text{card}(\emptyset) = 0$.

Proof: There is 0 element in \emptyset , so $\text{card}(\emptyset)$ is 0. Q.E.D.

Prove that if $\text{card}(C) = 0$ then C is $\emptyset \forall C$.

Proof: Let container C , $\text{card}(C) = 0 \therefore$ there is no element in $C \therefore C$ is empty $\therefore C$ is $\emptyset \forall C$. Q.E.D.

Prove $1 \in 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$.

Proof: By [Table EQ](3) from Supporting Proofs for the Empty, $[1=1] \Rightarrow [1 \text{ in } 1] \therefore 1 \in 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Prove 1 is a container $\forall 1 \in \mathbb{N}$.

Proof: $1 \in 1 \therefore 1 \text{ in } 1 \therefore 1$ is a container $\forall 1 \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Prove $\text{card}(1) \neq 0 \forall 1 \in \mathbb{N}$.

Proof: The container 1 has only 1 count of element in 1. The element is 1 itself. $\therefore \text{card}(1) = 1 \neq 0 \therefore \text{card}(1) \neq 0 \forall 1 \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Prove 1 is not $\emptyset \forall 1 \in \mathbb{N}$.

Proof:

Suppose 1 is $\emptyset \therefore \text{card}(1) = 0$. But, $\text{card}(1) \neq 0$; $\text{card}(1) \neq 0$ and $\text{card}(1) = 0 \rightarrow \leftarrow \forall 1 \in \mathbb{N} \therefore 1$ is not $\emptyset \forall 1 \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Prove $\text{card}(n) \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

Proof:

The $\text{card}(1) \neq 0$. Assume $\text{card}(n) = 0$. But, $(n+1) \in \mathbb{N} \therefore \text{card}(n+1) = 1 \neq 0 \therefore \text{card}(n) \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Prove n is not $\emptyset \forall n \in \mathbb{N}$.

Proof:

$1 \in \mathbb{N}$, 1 is not \emptyset . Assume $n \in \mathbb{N}$, n is not \emptyset . But, $(n+1)$ is also in $\mathbb{N} \therefore (n+1) \in \mathbb{N}$, and, $\text{card}(n+1) = 1 \neq 0 \therefore n+1$ is not $\emptyset \therefore n$ is not $\emptyset \forall n \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Prove \aleph is not $\emptyset \forall \aleph \in \mathbb{N}$.

Proof: n is not $\emptyset \forall n \in \mathbb{N}$. Since $\aleph \in \mathbb{N} \therefore \aleph$ is not $\emptyset \forall \aleph \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Therefore, the existence of \aleph is nontrivial because \aleph is not $\emptyset \forall \aleph \in \mathbb{N}$. For the existence of \aleph , we can proceed to prove that \mathbb{N} is a container with $\exists \text{card}(\mathbb{N}) = \aleph \forall \mathbb{N}, \aleph$.

Prove $\text{card}(\mathbb{N}) > 0$.

Proof: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. $1 \text{ in } \mathbb{N} \therefore 1 \in \mathbb{N} \therefore \text{card}(\mathbb{N}) \geq 1 > 0$. Q.E.D.

Because $\text{card}(\mathbb{N}) > 0$, so \mathbb{N} is not empty, and therefore \mathbb{N} is nontrivial.

Prove that \mathbb{N} is a container with $\exists \text{card}(\mathbb{N}) = \aleph \forall \mathbb{N}, \aleph$.

Proof: Note that $S_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ is a container with $\exists \text{card}(S_n) = n \forall S_n, n \in \mathbb{N}$.

\mathbb{N} is a special case of $S_n \therefore S_\aleph$ is $\mathbb{N} \therefore S_\aleph$ is a container with $\exists \text{card}(S_\aleph) = \aleph \forall S_\aleph, \aleph \in \mathbb{N}$. But, S_\aleph is $\mathbb{N} \therefore \mathbb{N}$ is a container with $\exists \text{card}(\mathbb{N}) = \aleph \forall \mathbb{N}, \aleph \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Prove that n is a container with $\exists \text{card}(n)=1 \forall n \in \mathbb{N}$.

Proof: 1 in $1 \therefore 1$ is a container. For each 1 in container 1 , there is 1 count of 1 in the container 1 , so $\text{card}(1)=1$. Suppose $\text{card}(1)=1$ is infinity \therefore infinity is bounded. But, infinity is not bounded; (infinity is not bounded) and (infinity is bounded) $\rightarrow \leftarrow \forall \text{card}(1)=1 \therefore \text{card}(1)=1$ is not infinity $\therefore \exists \text{card}(1)=1$. Assume n is a container with $\exists \text{card}(n)=1$. $(n+1)$ in $(n+1) \therefore (n+1)$ is a container. For each $(n+1)$ in the container $(n+1)$, there is 1 count of $(n+1)$ in the container $(n+1)$, so $\text{card}(n+1)=1$. Suppose $\text{card}(n+1)=1$ is infinity \therefore infinity is bounded. But, infinity is not bounded; (infinity is not bounded) and (infinity is bounded) $\rightarrow \leftarrow \forall \text{card}(n+1)=1 \therefore \text{card}(n+1)=1$ is not infinity $\therefore \exists \text{card}(n+1)=1$. $\therefore n$ is a container with $\exists \text{card}(n)=1 \forall n \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

With the Definition of Existence, we can justify the existence of natural numbers. The paper has shown that the natural number 2 , for example, exists by applying the $\exists n \forall n \in \mathbb{N}$ derived from the Definition of Existence. In turn, the use of Huo Jian Hua's Definition of Boundedness has led to the Definition of Existence proof. By induction, we know that the natural number \aleph exists and is nontrivial, and, each element in \mathbb{N} exists and is nontrivial (i.e., each natural number has a nontrivial existence). Thank 霍建華 (Huo Jian Hua) for His Definition of Boundedness. All rights-benefits of \mathbb{N} belong to Huo Jian Hua by the guaranteed contract term for that first "on use" of Huo Jian Hua's Definition of Boundedness.

自然數存在的證明

∞ 可在無明確指定容器的情況下存在： $\exists \infty \forall \infty$ ，1也可以在無明確指定容器的情況下存在： $\exists 1 \forall 1$ 。

證明 $\exists 1 \forall 1$ 。

證： 假設1即 ∞ $\therefore \infty$ 即一個容器。但， ∞ 即非一個容器，（ ∞ 即非一個容器）又（ ∞ 即一個容器） $\rightarrow \leftarrow \forall 1$
 $\therefore 1$ 即非 ∞ $\therefore \exists 1 \forall 1$ 。證明完畢。

此篇文章使用歸納法從證明 $\exists 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$ 的證明以證明 $\exists n \forall n \in \mathbb{N}$ ，自幼稚園起就在學的自然數 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ 。例如，證明 $\exists 2 \forall 2 \in \mathbb{N}$ 以及2即非 $\emptyset \forall 2 \in \mathbb{N}$ 。此文之後證明 \mathbb{N} 即一個容器帶著基數 $\exists \text{card}(\mathbb{N}) = \aleph$ 且 \aleph 即非 \emptyset 。此文最終展示每一個在 \mathbb{N} 容器內的元素皆帶著基數1，及 \aleph 即非無限 $\forall \aleph$ 的查對。（值得注意的是，雖然 \emptyset 在 \mathbb{N} 內，數學歸納法是從 $1 \in \mathbb{N}$ 開始，而不是 \emptyset 。）我們有必要使用霍建華的〈有界的定義〉把基礎證明先鋪設好： $[x \text{ 即 } y] \Rightarrow [y \text{ 即有界}] \forall x, y$ 。

證明 $[x \text{ 即 } y] \Rightarrow [y \text{ 即有界}] \forall x, y$ 。

證： 從之前的證明已得知 $[x \text{ 即 } y] \Rightarrow [y \text{ 即一個容器}]$ 。 $\therefore [y \text{ 即一個容器}] \Rightarrow [y \text{ 屬於一個容器}]$ ，根據[覽XY1] $\therefore y$ 即有界 $\forall x, y$ ，根據霍建華〈有界的定義〉。證明完畢。

$\exists 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$

$\exists 1 \forall 1$ 並無指定的容器。然而，1可以在 \mathbb{N} 內，因此1可以有 \mathbb{N} 做一個容器： $1 \in \mathbb{N}$ 。

證明 $1 \in \mathbb{N}$ 。

證： 1在 \mathbb{N} 內 $\therefore 1 \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

更進一步的是1可以 \mathbb{N} 做容器的狀況下存在： $\exists 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$ 。

證明 $\exists 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$ 。

證： 假設1即 ∞ $\therefore \infty$ 即有界。但， ∞ 即非有界，（ ∞ 即非有界）又（ ∞ 即有界） $\rightarrow \leftarrow \forall 1 \in \mathbb{N}$ $\therefore 1$ 即非 ∞ $\therefore \exists 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

證明1即非 $\emptyset \forall 1 \in \mathbb{N}$ 。

證： 1已在1內。有計數到1個1在1內，因此基數 $\text{card}(1) = 1 \neq 0$ $\therefore 1$ 即非 $\emptyset \forall 1 \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

所以，自然數1的存在並非微不足道的，至此已完成以歸納法證明 $\exists n \forall n \in \mathbb{N}$ 裡面的第一個步驟。

$\exists n \forall n \in \mathbb{N}$

證明 n 即非 $\infty \forall n \in \mathbb{N}$ 。

證：

$\exists 1 \forall 1 \in \mathbb{N} \therefore 1$ 即非 ∞ 。認為 $n \in \mathbb{N}$ 即非 ∞ ，然而 $(n+1)$ 在 \mathbb{N} 內 $\therefore (n+1) \in \mathbb{N}$ 。假設 $(n+1)$ is $\infty \therefore \infty$ 即有界。但， ∞ 即非有界， $(\infty$ 即非有界) 又 $(\infty$ 即有界) $\rightarrow \leftarrow \forall (n+1) \in \mathbb{N} \therefore (n+1)$ 即非 $\infty \therefore n$ 即非 $\infty \forall n \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

證明 $\exists n \forall n \in \mathbb{N}$ 。

證： $\exists 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$ 。認為 $\exists n \forall n \in \mathbb{N} \therefore n$ 即非 ∞ 。 $(n+1)$ 在 \mathbb{N} 內，因此 $(n+1) \in \mathbb{N} \therefore (n+1)$ 即非 ∞ 。 $\therefore \exists (n+1) \in \mathbb{N}$ 。重述〈「存在」的定義〉：

$[\exists x \quad] \leftrightarrow [\quad x \text{ 即非 } \infty] \forall x$ ，同等地， $[\quad x \text{ 即非 } \infty] \leftrightarrow [\exists x \quad] \forall x$
 $\therefore [\exists (n+1) \in \mathbb{N}] \leftrightarrow [(n+1) \in \mathbb{N} \text{ 即非 } \infty] \forall (n+1) \in \mathbb{N} \therefore [(n+1) \in \mathbb{N} \text{ 即非 } \infty] \leftrightarrow [\exists (n+1) \in \mathbb{N}] \forall (n+1) \in \mathbb{N}$ 。
 $\therefore \exists n \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \therefore \exists n \forall n \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

證明 n 即非 $\emptyset \forall n \in \mathbb{N}$ 。

證： 1 即非 $\emptyset \forall 1 \in \mathbb{N}$ 。認為 n 即非 $\emptyset \forall n \in \mathbb{N}$ 。 $(n+1) \in \mathbb{N}$ ，有計數道 1 個 $(n+1)$ 在 $(n+1)$ 內 \therefore 基數 $\text{card}(n+1)=1 \neq 0 \therefore (n+1)$ 即非 $\emptyset \forall (n+1) \in \mathbb{N}$ 。 $\therefore n$ 即非 $\emptyset \forall n \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

所以，每一個在 \mathbb{N} 內存在的自然數皆非微不足道。舉例證明自然數 2 的存在及其非微不足道。

舉例 $\exists 2 \forall 2 \in \mathbb{N}$ 。

證明 $2 \in \mathbb{N}$ 。

證： 2 在 \mathbb{N} 內 $\therefore 2 \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

$2 \in \mathbb{N}$ 核對 2 是一個自然數。

證明 $\exists 2 \forall 2 \in \mathbb{N}$

證： $2 \in \mathbb{N} \therefore n=2$ 。 $\exists n \forall n \in \mathbb{N} \therefore \exists 2 \forall 2 \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

證明 2 即非 $\emptyset \forall 2 \in \mathbb{N}$ 。

證： $2 \in \mathbb{N}$ ，因此 $n=2$ 。 n 即非 $\emptyset \forall n \in \mathbb{N} \therefore 2$ 即非 $\emptyset \forall 2 \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

所以，自然數 2 的存在並非微不足道。

Card(N)=N∈N

N 的基數是一個在 N 內的一個自然數 N。要證明基數 Card(N)=N∈N，我們需要〈子容器的定義〉以及霍建華〈有界的定義〉。

子容器的定義

$$[C_a \subseteq C_b] \Leftrightarrow [x \text{ 在 } C_a \text{ 內 } \forall x \in C_a \text{ } x \text{ 在 } C_b \text{ 內}] \quad \forall C_a, C_b。$$

證明子容器的定義： $[C_a \subseteq C_b] \Leftrightarrow [x \text{ 在 } C_a \text{ 內 } \forall x \in C_a \text{ } x \text{ 在 } C_b \text{ 內}] \quad \forall C_a, C_b。$

證：

C_a	C_b	$C_a \subseteq C_b$	$x \text{ 在 } C_a \text{ 內 } \forall x \in C_a \text{ } x \text{ 在 } C_b \text{ 內}$	$[C_a \subseteq C_b] \Leftrightarrow [x \text{ 在 } C_a \text{ 內 } \forall x \in C_a \text{ } x \text{ 在 } C_b \text{ 內}]$
是	是	是	是	是
是	否	否	否	是
是	∅	否	否	是
否	是	否	否	是
否	否	是	是	是
否	∅	否	否	是
∅	是	是	是	是
∅	否	是	是	是
∅	∅	是	是	是

[覽 SubC]

證明完畢。

證明 $S_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 即一個容器帶著 $\exists \text{card}(S_n) = n \quad \forall S_n, n \in \mathbb{N}$ 。

證： 1 在 S_1 內 $\therefore S_1$ 即一個容器帶著 $\text{card}(S_1) = 1$ 在 \mathbb{N} 內 $\therefore \text{card}(S_1) = 1 \in \mathbb{N}$ 。假設 $\text{card}(S_1) = 1$ 即 $\infty \therefore \infty$ 即有界。但， ∞ 即非有界，(∞ 即非有界) 又 (∞ 即有界) $\rightarrow \leftarrow \forall \text{card}(S_1) = 1 \therefore \text{card}(S_1) = 1$ 即非 $\infty \therefore \exists \text{card}(S_1) = 1 \quad \forall S_1$ 。認為 S_n 即一個容器帶著 $\exists \text{card}(S_n) = n, n \in \mathbb{N}$ 。 $n+1$ 在 $S_{n+1} = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1\}$ 內， $\therefore S_{n+1}$ 即一個容器。 S_{n+1} 有 $n+1$ 個元素在 S_{n+1} 內 $\therefore \text{card}(S_{n+1}) = n+1$ 。 $n+1$ 在 \mathbb{N} 內 $\therefore (n+1) \in \mathbb{N}$ 。假設 $\text{card}(S_{n+1}) = (n+1)$ 即 $\infty \therefore \infty$ 即有界。但， ∞ 即非有界，(∞ 非有界) 又 (∞ 即有界) $\rightarrow \leftarrow \forall \text{card}(S_{n+1}) = (n+1) \therefore \text{card}(S_{n+1}) = (n+1)$ 即非 $\infty \therefore \exists \text{card}(S_{n+1}) = (n+1) \therefore S_n$ 即一個容器帶著 $\exists \text{card}(S_n) = n \quad \forall S_n, n \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

證明 $S_n \subseteq \mathbb{N} \quad \forall S_n, n \in \mathbb{N}$ 。

證： 1 在 S_1 內 $\forall 1 \in S_1$ 1 在 \mathbb{N} 內 $\therefore S_1 \subseteq \mathbb{N}$ 。認為 x 在 S_n 內 $\forall x \in S_n$ x 在 \mathbb{N} 內。以 x 在 S_{n+1} 內 $\forall x \in S_{n+1}$ x 也在 \mathbb{N} 內 $\therefore S_{n+1} \subseteq \mathbb{N}$ 。 $\therefore S_n \subseteq \mathbb{N} \quad \forall S_n, n \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

證明 $S_n \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \text{card}(S_n) \in \mathbb{N} \quad \forall S_n, n \in \mathbb{N}$ 。

證：設 $(S = S_1) \therefore S_1 \subseteq \mathbb{N}, \exists \text{card}(S_1) = 1, 1 \in \mathbb{N}$ 。
認為 $(S = S_n), S_n \subseteq \mathbb{N}, \exists \text{card}(S_n) = n, n \in \mathbb{N}$ 。
($S = S_{n+1}$)。但， $n+1$ 即在 \mathbb{N} 內，因此 $(n+1) \in \mathbb{N}$ 。

$\therefore 1. S_{n+1} \subseteq \mathbb{N} \quad \forall S_{n+1}, n+1 \in \mathbb{N}$ 。

2. S_{n+1} 即是一個容器帶著 $\exists \text{card}(S_{n+1}) = n+1 \quad \forall S_{n+1}, n+1 \in \mathbb{N}$ 。

$\therefore S_{n+1} \subseteq \mathbb{N}, \exists \text{card}(S_{n+1}) = n+1, (n+1) \in \mathbb{N} \therefore S_n \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \text{card}(S_n) \in \mathbb{N} \quad \forall S_n, n \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

證明 $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \quad \forall \mathbb{N}$ 。

證： x 在 \mathbb{N} 內 $\forall x \in \mathbb{N}$ x 在 \mathbb{N} 內 $\therefore \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \quad \forall \mathbb{N}$ 。證明完畢。

證明 $|\mathbb{N}|$ 即非 $\infty \quad \forall |\mathbb{N}|$ 。

證明：假設 $|\mathbb{N}|$ 即 $\infty \therefore \infty$ 即一容器，但 ∞ 即非一容器，(∞ 即非一容器) 又 (∞ 即一容器) $\rightarrow \leftarrow \forall |\mathbb{N}| \therefore |\mathbb{N}|$ 即非 $\infty \quad \forall |\mathbb{N}|$ 。

證明 $\exists |N| \forall |N|$ ， $|N|$ 為 N 的基數。

證： $|N|$ 即非 ∞ $\therefore \exists |N| \forall |N|$ 。證明完畢。

證明 $\exists |N| \forall |N| \in N$ ，而 $|N|$ 即 N 的基數。

證： $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ 。

設 $S_1 = \{1\} \therefore S_1 \subseteq N, |S_1| = 1, 1 \in N \therefore \exists |S_1| = 1, \therefore |S_1| \in N$ 。

認為 $S_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}, S_n \subseteq N, |S_n| = n, n \in N \therefore \exists |S_n| = n, \therefore |S_n| \in N$ 。

$S_{n+1} = \{1, 2, 3, \dots, n, (n+1)\}, S_{n+1} \subseteq N, |S_{n+1}| = (n+1), (n+1) \in N \therefore \exists |S_{n+1}| = (n+1), \therefore |S_{n+1}| \in N$ 。
 $\therefore S_n \subseteq N, \exists |S_n| \forall |S_n| \in N$ 。

$\therefore S_n \subseteq N, \exists |S_n| \forall |S_n| \in N$

$\therefore N \subseteq N, \exists |N| \forall |N|$

$\therefore N$ 為 S_n 的特例， $S_{|N|} = N$ 。

$\therefore S_{|N|} \subseteq N, \exists |S_{|N|}| \forall |S_{|N|}| \in N$ 。因為 $S_{|N|} = N$ ，

$\therefore N \subseteq N, \exists |N| \forall |N| \in N$ 。

設 $\aleph = |N| \therefore N = \{1, 2, 3, \dots, \aleph\}$ 。 \aleph 在 N 內 $\therefore \aleph \in N$ 。

$S_\aleph = \{1, 2, 3, \dots, \aleph\} \therefore S_\aleph \subseteq N$ 與 $N \subseteq S_\aleph \therefore S_\aleph = N$ 。

$\therefore S_\aleph \subseteq N, \exists |S_\aleph| \forall |S_\aleph| \in N$ 。

但是， $S_\aleph = N, \therefore N \subseteq N, \exists |N| \forall |N| \in N$ ，證明完畢。

由於 $\exists |N| \forall |N| \in N$ 的證明 $\therefore |N|$ 在 N 內。雖然 $|N|$ 為一個基數，由於我們可經由歸納法展現 $|N| \in N$ ， $|N|$ 在 N 內 $\therefore |N|$ 也是一個自然數。以 \aleph 指稱 $|N| \therefore \exists \aleph \forall \aleph \in N$ 。

證明 $\aleph \in \mathbb{R}$ 。

證： 1 在 N 內，然而 1 也在 \mathbb{R} 內。認為 n 在 N 內以及 n 在 \mathbb{R} 內。但， $(n+1)$ 在 N 內， $(n+1)$ 也在 \mathbb{R} 內。

$\aleph \in N \therefore \aleph \in \mathbb{R}$ 。證明完畢。

查對 \aleph 即非無限 $\forall \aleph$ 。

證： $1 \leq \aleph$ 與 $\aleph \leq 2^\aleph, 1, 2, \aleph \in \mathbb{R} \therefore 1$ 即 \aleph 的下界，以及 2^\aleph 即 \aleph 的上界 $\therefore 1 \leq \aleph \leq 2^\aleph \therefore \aleph \in [1, 2^\aleph] \therefore \aleph$ 在 $[1, 2^\aleph]$ 之內 $\therefore \aleph$ 屬於 $[1, 2^\aleph] \therefore \aleph$ 即有界，根據霍建華〈有界的定義〉。(*)

查對一·假設 \aleph 即無限 $\therefore \aleph$ 即無界 $\therefore \aleph$ 即非有界。但，根據 (*), \aleph 即有界，(\aleph 即有界) 又 (\aleph 即非有界) $\rightarrow \leftarrow \forall \aleph$ $\therefore \aleph$ 即非無限 $\forall \aleph$ 。

查對二·假設 \aleph 即無限 \therefore 即非一個數目。但， $\aleph \in \mathbb{R} \therefore \aleph$ 即一個實數 $\therefore \aleph$ 即一個數目，(\aleph 即一個數目) 又 (\aleph 即非一個數目) $\rightarrow \leftarrow \forall \aleph \therefore \aleph$ 即非無限 $\forall \aleph$ 。證明完畢。

非微不足道 \mathbb{N} 的存在

要展示 \mathbb{N} 非微不足道，我們需要證明 \mathbb{N} 即非 \emptyset 。但是要證明 \mathbb{N} 即非 \emptyset ，我們需要展示 $\text{card}(\mathbb{N}) \neq 0$ 。

證明 $\text{card}(\emptyset)=0$ 。

證： \emptyset 內有 0 個元素，因此 $\text{card}(\emptyset)$ 即 0。證明完畢。

證明若 $\text{card}(C)=0$ 則 C 即 $\emptyset \forall C$ 。

證： 設容器 C ， $\text{card}(C)=0 \therefore C$ 內沒有任何元素 $\therefore C$ 即空無 $\therefore C$ 即 $\emptyset \forall C$ 。證明完畢。

證明 $1 \in 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$ 。

證： 根據〈「空無」的支援證明〉[覽 EQ](3)， $[1=1] \Rightarrow [1 \text{ 在 } 1 \text{ 內}] \therefore 1 \in 1 \forall 1 \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

證明 1 即一個容器 $\forall 1 \in \mathbb{N}$ 。

證： $1 \in 1 \therefore 1$ 在 1 內 $\therefore 1$ 即一個容器 $\forall 1 \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

證明 $\text{card}(1) \neq 0 \forall 1 \in \mathbb{N}$ 。

證： 容器 1 擁有計數到 1 個元素在容器 1 內，該元素就是 1 它自己。 $\therefore \text{card}(1)=1 \neq 0 \therefore \text{card}(1) \neq 0 \forall 1 \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

證明 1 即非 $\emptyset \forall 1 \in \mathbb{N}$ 。

證： 假設 1 即 $\emptyset \therefore \text{card}(1)=0$ 。但 $\text{card}(1) \neq 0$ ； $\text{card}(1) \neq 0$ 又 $\text{card}(1)=0 \rightarrow \leftarrow \forall 1 \in \mathbb{N} \therefore 1$ 即非 $\emptyset \forall 1 \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

證明 $\text{card}(n) \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ 。

證： $\text{card}(1) \neq 0$ 。認為 $\text{card}(n) \neq 0$ 。但， $(n+1) \in \mathbb{N} \therefore \text{card}(n+1)=1 \neq 0 \therefore \text{card}(n) \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

證明 n 即非 $\emptyset \forall n \in \mathbb{N}$ 。

證： $1 \in \mathbb{N}$ ， 1 即非 \emptyset 。認為 $n \in \mathbb{N}$ ， n 即非 \emptyset 。但， $(n+1)$ 也在 \mathbb{N} 內 $\therefore (n+1) \in \mathbb{N}$ ，以及， $\text{card}(n+1)=1 \neq 0 \therefore n+1$ 即非 $\emptyset \therefore n$ 即非 $\emptyset \forall n \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

證明 \mathbb{N} 即非 $\emptyset \forall \mathbb{N} \in \mathbb{N}$ 。

證： n 即非 $\emptyset \forall n \in \mathbb{N}$ 。既然 $\mathbb{N} \in \mathbb{N} \therefore \mathbb{N}$ 即非 $\emptyset \forall \mathbb{N} \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

所以 \mathbb{N} 的存在並非微不足道因為 \mathbb{N} 即非空無 $\forall \mathbb{N} \in \mathbb{N}$ 。由於 \mathbb{N} 的存在，我們可以進而證明 \mathbb{N} 是一個容器帶著 $\exists \text{card}(\mathbb{N})=\mathbb{N} \forall \mathbb{N} \in \mathbb{N}$ 。

證明 $\text{card}(\mathbb{N}) > 0$ 。

證： $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, \dots\}$ 。1 在 \mathbb{N} 內 $\therefore 1 \in \mathbb{N} \therefore \text{card}(\mathbb{N}) \geq 1 > 0$ 。證明完畢。

因為 $\text{card}(\mathbb{N}) > 0$ ，所以 \mathbb{N} 即非空無，也所以 \mathbb{N} 並非微不足道。

證明 \mathbb{N} 即一個容器帶著 $\exists \text{card}(\mathbb{N})=\mathbb{N} \forall \mathbb{N} \in \mathbb{N}$ 。

證： 註： $S_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 即一個容器帶著 $\exists \text{card}(S_n)=n \forall S_n \in \mathbb{N}$ 。
 \mathbb{N} 為 S_n 的特別案例。 $\therefore S_{\mathbb{N}}$ 即 \mathbb{N} 。 $\therefore S_{\mathbb{N}}$ 即一個容器帶著 $\exists \text{card}(S_{\mathbb{N}})=\mathbb{N} \forall S_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ 。但， $S_{\mathbb{N}}$ 即 $\mathbb{N} \therefore \mathbb{N}$ 即一個容器帶著 $\exists \text{card}(\mathbb{N})=\mathbb{N} \forall \mathbb{N} \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

證明 n 即一個容器帶著 $\exists \text{card}(n)=1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

證： 1 在 1 內 \therefore 1 即一個容器。以每一個在容器 1 內的 1，就計數到 1 個 1 在 1 內，因此 $\text{card}(1)=1$ 。假設 $\text{card}(1)=1$ 即無限 \therefore 無限即有界。但，無限即非有界，（無限即非有界）又（無限即有界） $\rightarrow \leftarrow \forall \text{card}(1)=1 \therefore \text{card}(1)=1$ 即非無限 $\therefore \exists \text{card}(1)=1$ 。認為 n 即一個容器帶著 $\exists \text{card}(n)=1$ 。 $(n+1)$ 在 $(n+1)$ 內 $\therefore (n+1)$ 即一個容器。以每一個在 $(n+1)$ 容器內的 $(n+1)$ ，就計數到 1 個 $(n+1)$ 在 $(n+1)$ 容器內，因此 $\text{card}(n+1)=1$ 。假設 $\text{card}(n+1)=1$ 即無限 \therefore 無限即有界。但，無限即非有界，（無限即非有界）又（無限即有界） $\rightarrow \leftarrow \forall \text{card}(n+1)=1 \therefore \text{card}(n+1)=1$ 即非無限 $\therefore \exists \text{card}(n+1)=1$ 。 $\therefore n$ 即一個容器帶著 $\exists \text{card}(n)=1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ 。證明完畢。

以應用〈存在的定義〉，我們可以辯解自然數的存在。此文應用經由〈存在的定義〉所衍生的 $\exists n \forall n \in \mathbb{N}$ 來舉例展示自然數 2 的存在。然而，在應用了霍建華〈有界的定義〉下使〈存在的定義〉獲得其證明。經由歸納法我們得知自然數 \mathbb{N} 是存在的及其並非微不足道，每一個在 \mathbb{N} 內的元素皆存在且並非微不足道，也就是說每一個自然數皆並非微不足道的存在。感謝霍建華的〈有界的定義〉，根據霍建華〈有界的定義〉「只要一使用了」的契約保證，一切權力益全都歸霍建華。